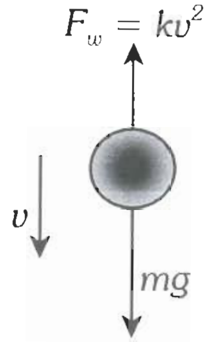
TENTAMEN MECHANICA 11 februari 2005 tijd: 14:00 - 17:00 uur

MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART BLAD voorzien van je naam en studentnummer

$Cijfer = \sum punten/3 + 1$

Opgave 1.



Een regendruppel valt vanaf grote hoogte vanuit een wolk naar beneden. Tijdens de val blijft de massa m constant. De druppel ondervindt een wrijvingskracht F_W die evenredig is met het kwadraat van de snelheid v van de druppel.

Dus: $F_W = kv^2$.

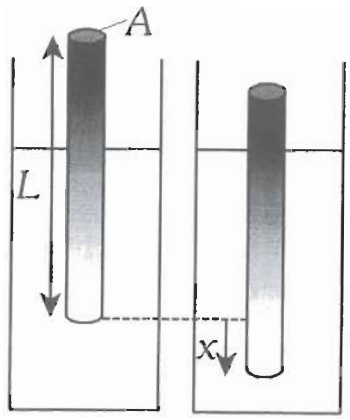
1p ☐ a. Geef de bewegingsvergelijking van de druppel (dwz de wet van Newton).

3p ☐ b. Laat zien dat als $x = x(t)$ de door de druppel afgelegde weg is, er geldt dat $v^2 = A - B.e^{-2\gamma x}$. Druk A en γ uit in de grootheden m, k en g. (HINT: differentieer de uitdrukking voor v^2 naar de tijd en substitueer dit in de bewegingsvergelijking).

1p ☐ c. Veronderstel dat de druppel vanuit rust is begonnen te vallen. Bereken B uitgedrukt in de grootheden m, k en g.

1,5p ☐ d. Maak een schatting van de grootte van de wrijvingsconstante k door redelijke aannamen te maken over de massa van de druppel en de snelheid waarmee deze op de grond komt.

Opgave 2.



Een homogeen, cilindervormig voorwerp met dichtheid ρ_0, lengte L en doorsnede A, steekt verticaal in een bak met water. De dichtheid van water is ρ_w. Vanuit rust wordt het over een afstand x naar beneden geduwd en daarna losgelaten. De bak is zo groot dat het niveau van het water niet merkbaar verandert. Het voorwerp begint een harmonische trilling uit te voeren.

Voor dit geval geldt de wet van Archimedes: 'Op een voorwerp in een vloeistof wordt een kracht uitgeoefend die gelijk is aan het gewicht (dit is een kracht!) van de hoeveelheid vloeistof die door het voorwerp verplaatst is.'

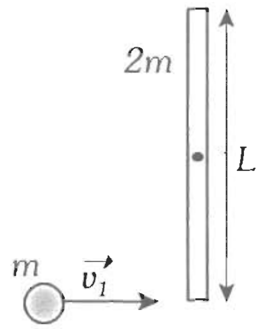
Wrijvingskrachten kunnen worden verwaarloosd.

2p ☐ a. Geef de bewegingsvergelijking voor het voorwerp (dus de wet van Newton).

4p ☐ b. Laat zien dat het voorwerp een harmonische trilling uitvoert; bereken de periode van de trilling uitgedrukt in de gegeven grootheden.

>>>> Zie voor de overige opgaven de andere zijde van dit blad.

Opgave 3.



Op een volkomen glad, horizontaal vlak ligt een smalle, homogene balk met lengte L en massa $2m$. Een schijfje met massa m glijdt over hetzelfde vlak met een snelheid $\vec{v}_1$ en botst volkomen elastisch precies tegen het uiteinde van de balk (zie tekening; bovenaanzicht).
Na de botsing heeft het schijfje een snelheid $\vec{u}_1$, heeft het zwaartepunt (CM) van de balk een snelheid $\vec{u}_2$ en draait de balk om z'n zwaartepunt met een hoeksnelheid ω.

1,5p ☐ a. Er gelden bij deze botsing drie behoudswetten: welke wetten zijn dat?
(Je hoeft de vergelijkingen niet te geven, maar alleen de namen van de wetten die geldig zijn).

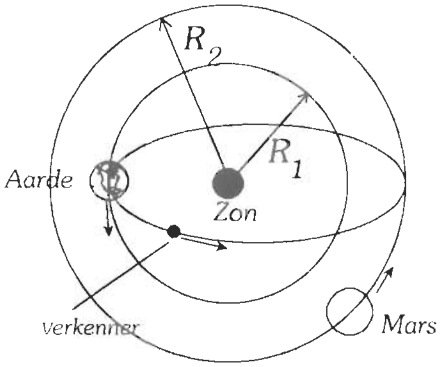
1p ☐ b. Bij de botsing speelt het traagheidsmoment van de balk een rol (die van het schijfje mag je verwaarlozen). Geef de uitdrukking voor dit traagheidsmoment ten opzichte de as loodrecht op de balk door het zwaartepunt, uitgedrukt in de gegeven grootheden.

2p ☐ c. De verhouding tussen de grootte van de snelheid $\vec{u}_2$ van de balk na de botsing en de hoeksnelheid ω, hangt alleen af van de lengte van de balk. Leidt - met gebruikmaking van twee behoudswetten - deze verhouding af.

4p ☐ d. Laat zien dat na de botsing de snelheden van het schijfje en het zwaartepunt van de balk evengroot zijn.

Opgave 4.

Een Marsverkenner wordt vanaf de aarde in een ellipsvormige baan om de zon gebracht. Het verst van de zon verwijderde punt valt samen met de baan van Mars. De banen van de Aarde en van Mars worden cirkelvormig verondersteld met stralen R_1 resp. R_2.
Voor de beweging van de verkenner laten we de invloed van de Aarde en Mars buiten beschouwing.



2p ☐ a. Bereken de excentriciteit ε van de baan van de verkenner, als gegeven is dat $\dfrac{R_2}{R_1} = 1{,}5$.

4p ☐ b. Voor alle massa's die ellipsvormige banen om de zon beschrijven geldt de derde wet van Kepler: $\dfrac{T^2}{a^3} = \text{constant}$, hierin is T de omloopstijd van de baan en a de helft van de lange as van de ellips.
Bereken hoeveel jaar de verkenner er over doet om vanaf de Aarde, de baan van Mars te bereiken.

1a. $m\ddot{x} = mg - kv^2$

b. Uit $v^2 = A - B.e^{-2\gamma x}$ volgt met differentiëren $2v\dfrac{dv}{dt} = -B.-2\gamma e^{-2\gamma x}.\dfrac{dx}{dt} = 2\gamma Be^{-2\gamma x}.v$

dus $\ddot{x} = \dfrac{dv}{dt} = \gamma Be^{-2\gamma x}$ Invullen in de vergelijking levert:

$m.\gamma Be^{-2\gamma x} = mg - k(A - Be^{-2\gamma x}) = mg - kA + kBe^{-2\gamma x}$

Hieruit volgt: $A = \dfrac{mg}{k}$ en $\gamma = \dfrac{k}{m}$

c. Op $t = 0$ geldt: $v(0) = 0$ en $x(0) = 0$ zodat: $0 = A - B.1$ en $B = A = \dfrac{mg}{k}$

d. Aannamen: - de eindsnelheid van de druppel (als $x \approx \infty$) $v \approx 1\ m/s$

- massa van de druppel $m \approx 0{,}1\ gram = 1.10^{-4}\ kg$

dan volgt: $A \approx v^2 = 1$ en $k = \dfrac{mg}{A} = \dfrac{1.10^{-4}.9.81}{1} \approx 1.10^{-3}\ Nm^{-2}s^2$

2a. $m\ddot{x} = -Ax\rho_w.g$ met $m = \rho_0 AL$ zodat $\ddot{x} = -\dfrac{\rho_w}{\rho_0}\dfrac{g}{L}.x$

b. Aan de vergelijking voldoet: $x = x_0\cos(\omega t)$ met $\omega^2 = \dfrac{\rho_w}{\rho_0}\dfrac{g}{L}$ en $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho_0}{\rho_w}\dfrac{L}{g}}$

3a. - behoud van impuls
- behoud van impulsmoment
- behoud van (mechanische) energie

b. $I_{CM} = \dfrac{1}{12}.2m.L^2 = \dfrac{1}{6}mL^2$

c. impulsbehoud: $mv_1 = mu_1 + 2mu_2$ zodat $v_1 = u_1 + 2u_2$

impulsmomentbehoud (tov CM balk): $mv_1.\dfrac{L}{2} = mu_1.\dfrac{L}{2} + I_{CM}.\omega = mu_1.\dfrac{L}{2} + \dfrac{1}{6}mL^2.\omega$

zodat $v_1 = u_1 + \dfrac{1}{3}L\omega$

Daaruit volgt: $u_2 = \dfrac{1}{6}L\omega$ en $\dfrac{u_2}{\omega} = \dfrac{1}{6}L$

d. Energiebehoud levert: $\dfrac{1}{2}mv_1^2 = \dfrac{1}{2}mu_1^2 + \dfrac{1}{2}2mu_2^2 + \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{6}mL^2\omega^2$ zodat

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_1 - \frac{1}{3}L\omega)^2 + \frac{1}{2}2m(\frac{1}{6}L\omega)^2 + \frac{1}{12}mL^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{3}mLv_1\omega + \frac{1}{6}mL^2\omega^2$$

hieruit volgt: $v_1 = \dfrac{1}{2}L\omega$ en $u_1 = v_1 - \dfrac{1}{3}L\omega = \dfrac{1}{6}L\omega = u_2$

4a. $r = \dfrac{r_o}{1 + \varepsilon\cos\theta}$ daaruit volgt: $R_1 = \dfrac{r_o}{1+\varepsilon}$ en $R_2 = \dfrac{r_o}{1-\varepsilon}$ zodat $\varepsilon = \dfrac{R_1/R_2 - 1}{R_1/R_2 + 1} = 0{,}2$

b. $a = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$ daaruit volgt: $T^2 = a^3\dfrac{T_1^2}{R_1^3}$ → $T = \left[\dfrac{R_1 + R_2}{2R_1}\right]^{3/2} jaar = 1{,}4\ jaar$

De vluchttijd is dus 0,7 jaar.